Eerste Kandidatuur Natuurkunde
Examen Algebra Oefeningen
April 2002

1. Gegeven de lineaire functie f, met vergelijking:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \longmapsto (x - y + 4z,\ 3x + 2y - z,\ 2x + y - z)$$

wier matrix ten opzichte van de canonieke basis genoteerd wordt door A.

(a) Geef de matrix A.

(b) Geef een basis van de kern en het beeld van de functie f.

(c) Is de functie f injectief, surjectief of bijectief? Waarom? Geef de inverse functie (indien die bestaat).

(d) Bereken eigenwaarden en eigenvectoren van deze functie f.

(e) Geef een matrix B met eigenwaarden $0, 4$ en -3. Wat zijn de eigenvectoren?

(f) *Denkvraagje:* Beschouw de functie g met als matrix $B\ A$ ten opzichte van de canonieke basissen. *Los deze vraag op zónder de matrix $B\ A$ uit te rekenen.*

i. Is de functie g injectief, surjectief of bijectief?

ii. Geef een basis van de kern en het beeld van de functie g.

2. Zij G een groep en zij $N \triangleleft G$. Bewijs dat

$$Z_G(N) \triangleleft G.$$

3. Bewijs de volgende stelling:

Stel dat de reëelwaardige functies $f_1, f_2, \ldots, f_n$ alle $n-1$ continue afgeleiden hebben. Als de Wronskiaan van deze functies niet identiek nul is op het domein, dan vormen deze functies een lineair onafhankelijke verzameling in $C^{(n-1)}$.

Tip: $(A \Longrightarrow B) \iff (\neg B \Longrightarrow \neg A)$.

4. Beschouw volgende matrices $M_1, M_2 \in \mathfrak{M}_2$:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definieer de verzameling G als

$$G = \{\ \alpha M_1 + \beta M_2 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q},\ (\alpha, \beta) \neq (0,0)\ \}.$$

Toon aan dat G een abelse groep is voor de matrixvermenigvuldiging.