Eerste Kandidatuur Natuurkunde
Examen Algebra Oefeningen
September 2002

1. We werken in de $\mathbb{R}$-vectorruimte $\mathbb{R}^2$. Beschouw de afbeelding

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (v, w) \longmapsto {}^t v \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} w.$$

   (a) Toon aan dat deze bilineaire afbeelding een inproduct is.
   (b) Zoek een orthonormale basis voor $\mathbb{R}^2$ ten opzichte van dit inproduct.

2. Gegeven een reële matrix A, met als karakteristieke vergelijking

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = 0.$$

Motiveer al je antwoorden op volgende vragen ... Waarom geldt iets? Geldt het altijd?

   (a) Wat zijn de dimensies van A?
   (b) Hoeveel eigenruimten heeft A?
   (c) Is A omkeerbaar?
   (d) Is A diagonaliseerbaar?

3. We weten dat het product van twee bovendriehoeksmatrices (laten we stellen over $\mathbb{R}$) wederom een bovendriehoeksmatrix is.

   (a) Toon aan dat de verzameling G van alle omkeerbare bovendriehoeksmatrices een groep vormt voor de matrixvermenigvuldiging.
   (b) Beschouw de verzameling H van alle bovendriehoeksmatrices met allemaal éétjes op de diagonaal, i.e. $h_{ii} = 1$ voor alle i.
   Toon aan dat H een normale deelgroep is van G.

4. Zij G een abelse groep.

   (a) Zij $a, b \in G$, met $o(a) = n$ en $o(b) = m$. Wat kan je zeggen over $o(ab)$? Bewijs je bewering.
   (b) Beschouw de verzameling

$$H := \{ x \in G \mid o(x) < \infty \}.$$

   Toon aan dat H een deelgroep is van G.
   (c) Beschouw de groep $(\mathbb{Z}, +)$. Is de afbeelding

$$o : G \longrightarrow \mathbb{Z} : x \longmapsto o(x)$$

   die een element afbeeldt op zijn orde, een groepshomomorfisme? Zo ja, bewijs. Zo nee, geef een tegenvoorbeeld.