Examen kanstheorie en statistiek
1^e kandidatuur Natuurkunde

E. De Wolf *

1 juli 2002

1. Bij een groot aantal ziekenhuispatiënten werd nagegaan of ze leden aan diabetes en werd bovendien de bloeddruk gemeten. In deze populatie had 10% diabetes en 25% een hoge bloeddruk. Bij de diabetespatiënten had 85% een hoge bloeddruk.
   - Welk is de kans op hoge bloeddruk bij niet-diabetici? (0.183)
   - Welk is de kans dat een patiënt diabetes heeft indien de bloeddruk hoog is? (0.34)

2. $r_1, r_2, ..., r_n$ zijn n onafhankelijke Poisson veranderlijken met gemiddelden $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$. Bewijs dat de veranderlijke $r = \sum_{i=1}^{n} r_i$ ook Poisson verdeeld is. Wat is $\mathcal{M}\{r\}$ en $\sigma^2\{r\}$?

3. Het IQ van studenten (en proffen) is normaal verdeeld met gemiddelde 100 (per definitie) en dispersie 16.
   - Bereken de prob. dat een student een IQ heeft ≥ 132.
   - 25 studenten worden geselecteerd. Welk is de kans dat het gemiddelde IQ van deze studenten groter is dan 110?

4. Zij x een r.v. met cumulatieve d.f. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. Bewijs dat de r.v. $u = F(x)$ uniform verdeeld is over het interval (0,1).

5. De Cauchy-verdeling $\phi(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$ heeft als karakteristieke functie $\chi(t) = e^{-|t|}$. Beschouw n onafhankelijke Cauchy-veranderlijken $x_l, x_2, ..., x_n$. Welk is de verdeling van het rekenkundige gemiddelde $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$? Bespreek dit resultaat in het licht van de Centrale Limietstelling.

6. a) Bewijs de ongelijkheid van Tchebycheff; b) bewijs de Stelling van Bernoulli; c) de wet der grote getallen.

7. Uit een Gaussisch-verdeelde populatie met gemiddelde μ en dispersie σ neemt men een aselecte steekproef van n elementen.
   Bewijs dat de variantie van de verbeterde steekproef-variantie gelijk is aan $\frac{2\sigma^4}{n-1}$.

*De verantwoordelijkheid voor eventuele fouten in dit document berust bij de tekstbezorger (Filip Lambrechts) en niet bij de auteur van de vragen.

8. Bij het werpen van een dobbelsteen zijn zes uitslagen mogelijk $E_l ... E_6$. We werpen 12 dobbelstenen. Bereken de kans dat de verschijnselen $E_l ... E_6$ elk exact 2 keer optreden (0.0034). Dit is een 'urne-probleem' met 6 vakjes en 12 ballen.

9. Bewijs dat de binomiale verdeling $p_i = C_n^i \theta^i (1-\theta)^{n-i}$ kan benaderd worden door de normale verdeling voor grote n.

10. Toon aan dat een r.v. y met exponentiële verdeling $\phi(y) = e^{-y}$ kan worden gesimuleerd door middel van de transformatie $y = -ln(1-x)$ waarbij x uniform verdeeld is tussen 0 en 1.